

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

*Инновационная образовательная программа
«Наукоемкие технологии и экономика
инноваций»*

*Московского физико-технического института
(государственного университета)
на 2006–2007 годы*

Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров,
М. Н. Вялый

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия*

МОСКВА
МЗ ПРЕСС
2007

УДК 512.624

ББК 22.144

Ж91

Серия «Естественные науки. Математика. Информатика»

Редакционный совет серии:

Велихов Е. П.

Иванников В. П.

Кингсеп А. С.

Леванов Е. И.

Лобанов А. И. (ответственный секретарь серии)

Ризниченко Г. Ю.

Холодов А. С.

Шананин А. А.

Рецензенты:

Д. ф.-м. н., проф. *В. К. Леонтьев* (ВЦ РАН)

Кафедра математики МИОО

Ю. И. Журавлёв и др.

Ж91 Дискретный анализ. Основы высшей алгебры — Изд. 2,
испр. и доп. / Ю. И. Журавлёв, Ю. А. Флёров,
М. Н. Вялый — М.: МЗ Пресс, 2007. — 224 с.

Эта книга является учебным пособием по основам высшей алгебры. Она написана на основе материалов курса «дискретный анализ», проводимого многие годы для студентов ФУПИ МФТИ с учетом модификаций при переработке курса по инновационной образовательной программе МФТИ «Наукоемкие технологии и экономика инноваций». В ней излагаются начала теории групп, теории колец и теории полей. Особое внимание уделено конечным полям. В качестве примера приложений конечных полей приводятся начальные сведения по теории кодов, исправляющих ошибки.

Для студентов, специализирующихся на прикладной математике и изучающих высшую алгебру.

ISBN 978-5-94073-101-5

УДК 512.624

ББК 22.144

© Ю. И. Журавлёв, 2007

© МЗ Пресс, 2007

© В. А. Музыченко,
дизайн обложек серии, 2007

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
1. Группы	9
1.1. Определение и простейшие свойства	9
1.2. Примеры групп	16
1.2.1. Примеры абелевых групп	16
1.2.2. Группы преобразований	17
1.2.3. Группы симметрии	19
1.3. Циклические группы	22
1.4. Подгруппы	24
1.5. Задание группы порождающими и соотношениями	31
1.6. Изоморфизм и гомоморфизм	34
1.7. Нормальные подгруппы	40
1.8. Сопряженные элементы	42
1.9. Действия групп. Лемма Бернсайда	46
1.10. Факторгруппы	51
1.11. Ядро гомоморфизма	54
1.12. Абелевы группы	57
1.13. Задачи	68
2. Кольца	85
2.1. Определение кольца и простейшие свойства	85
2.2. Кольцо многочленов	88
2.3. Изоморфизмы и гомоморфизмы колец	92
2.4. Идеалы	92
2.5. Кольца классов вычетов	95

2.6.	Тела и поля, максимальные идеалы	98
2.7.	Евклидовы кольца	101
2.8.	Основная теорема арифметики	109
2.9.	Китайская теорема об остатках	111
2.10.	Задачи	112
3.	Конечные поля или поля Галуа	128
3.1.	Поле вычетов по модулю простого числа	128
3.2.	Автоморфизм Фробениуса	130
3.3.	Неприводимые многочлены	132
3.4.	Линейная алгебра над конечным полем	138
3.5.	Корни многочленов над конечным полем	145
3.6.	Мультипликативная группа поля	151
3.7.	Существование поля из p^n элементов	154
3.8.	Единственность поля из p^n элементов	159
3.9.	Циклические подпространства	160
3.10.	Задачи	164
4.	Коды, исправляющие ошибки	169
4.1.	Основная задача теории кодирования	169
4.2.	Циклические коды	174
4.3.	Коды BCH	175
4.4.	Квадратично-вычетные коды	178
4.5.	Совершенный код Голея	181
4.6.	Коды Рида – Соломона	183
4.7.	Коды Рида – Маллера	186
	Ответы, указания, решения	188
	Список литературы	213
	Предметный указатель	216