

УДК 517.1  
ББК 22.161я73  
С14

Серия «Высшее образование: Современный учебник»  
основана в 2001 году

# ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

**Садовничий В. А.**

С14 Теория операторов: Учеб. для вузов. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Дрофа, 2001. — 384 с. — (Высшее образование: Современный учебник).

ISBN 5—7107—4297—X

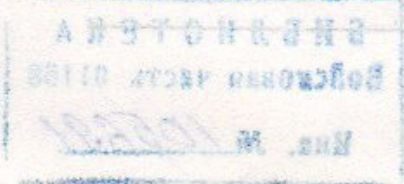
Учебник (3-е изд. — 1999 г.) соответствует программе курсов «Функциональный анализ», «Теория операторов», «Анализ III», которые читаются в университетах и педагогических вузах. В книге приведены основные теоретико-множественные понятия, представлена общая теория метрических, топологических, линейных топологических и нормированных пространств, общая теория меры, измеримых функций и интеграла Лебега. Подробно рассмотрены теория операторов в гильбертовом пространстве, спектральная теория самосопряженных операторов, применения методов теории аналитических функций в спектральной теории несамосопряженных операторов, теория преобразования Фурье и обобщенные функции.

*Для студентов университетов и педагогических вузов. Может быть полезен студентам вузов с углубленным изучением математики, аспирантам и научным работникам.*

УДК 517.1  
ББК 22.161я73

ISBN 5—7107—4297—X

© ООО «Дрофа», 2001



Серия «Высшее образование: Современный учебник»  
основана в 2001 году

Предисловие .....	3
<b>Глава I. МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА</b>	
§ 1. Простейшие понятия теории множеств .....	7
1. Основные свойства множеств. Отображения. Прямое произведение множеств .....	7
2. Мощность множества .....	12
3. Частичная упорядоченность. Упорядоченность .....	15
4. Сравнения мощностей .....	16
§ 2. Метрические пространства .....	18
1. Определение метрического пространства. Примеры .....	19
2. Открытые и замкнутые множества .....	23
3. Всюду плотные и совершенные множества .....	26
4. Сходимость. Непрерывные отображения .....	28
5. Компактность .....	30
6. База топологии пространства .....	32
<i>Задачи</i> .....	35
§ 3. Свойства метрических пространств .....	36
1. Пополнение метрических пространств .....	38
2. Основные теоремы в полных метрических пространствах .....	40
3. Компактность в метрических пространствах $\epsilon$ -сеть .....	46
<i>Задачи</i> .....	49
§ 4. Топологические пространства .....	50
1. Определение топологического пространства. Хаусдорфово топологическое пространство. Примеры .....	50
2. Замечание о топологических пространствах .....	53
<i>Задачи</i> .....	56
§ 5. Свойства топологических пространств .....	57
1. Регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства .....	57
2. Регулярные пространства со счетной базой. Теорема Тихонова .....	59
3. Компактные хаусдорфовы и нормальные пространства .....	60
4. Метрические и топологические пространства .....	61
5. Тихоновские произведения топологических пространств .....	61
6. Теорема Стоуна — Вейерштрасса .....	64
<i>Задачи</i> .....	66
<b>Глава II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА</b>	
§ 1. Линейные пространства .....	67
1. Группа, кольцо, поле, линейное пространство .....	67
2. Линейные операторы. Пространство операторов .....	73
3. Банаховы пространства .....	74

4. Выпуклые множества, функционал Минковского, полунормы . . .	75
5. Линейные топологические пространства.	
Теорема А. Н. Колмогорова . . . . .	80
6. Счетно-нормированные пространства . . . . .	85
<i>Задачи</i> . . . . .	88
§ 2. Линейные ограниченные операторы в банаховых и $F$ -пространствах. Основные принципы функционального анализа	88
1. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах. Банахово пространство операторов. Понятие $F$ -пространства . . .	89
2. Принцип равномерной ограниченности . . . . .	93
3. Теорема об обратном операторе. Принцип открытости отображения. . . . .	99
4. Продолжение операторов и функционалов. Принцип продолжения Банаха — Хана . . . . .	103
5. Различные топологии, различные типы сходимостей. Общие виды функционалов в конкретных пространствах. . . . .	109
6. Компактные множества, слабая компактность . . . . .	120
<i>Задачи</i> . . . . .	124

### Глава III. ТЕОРИЯ МЕРЫ. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. Теория меры . . . . .	124
§ 2. Измеримые функции . . . . .	140
§ 3. Интеграл Лебега . . . . .	144
1. Определение интеграла Лебега . . . . .	145
2. Свойства интеграла Лебега . . . . .	147
3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. . . . .	153
4. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана. . . . .	156
5. Пространства $L^p$ . . . . .	158
§ 4. Абсолютно непрерывные функции множеств. Теорема Радона — Никодима . . . . .	161
1. Абсолютно непрерывные функции множеств. . . . .	161
2. Теорема Радона — Никодима . . . . .	163
§ 5. Прямое произведение мер. Теорема Фубини . . . . .	166
1. Прямое произведение мер . . . . .	166
2. Теорема Фубини . . . . .	170
<i>Задачи</i> . . . . .	171

### Глава IV. ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Гильбертовы пространства. . . . .	173
1. Геометрия гильбертова пространства . . . . .	173
2. Базисы гильбертова пространства. . . . .	178
3. Размерность гильбертова пространства . . . . .	183
4. Ортогональное разложение в гильбертовом пространстве . . . . .	185
5. Биортогональные последовательности . . . . .	186
6. Матричное представление линейного ограниченного оператора в $H$ . . .	193
<i>Задачи</i> . . . . .	199
§ 2. Спектральные теоремы. . . . .	200
1. Сопряженный оператор . . . . .	201
2. Понятие о вполне непрерывном операторе . . . . .	202
3. Абсолютная норма оператора. . . . .	204

27	4. Альтернатива Фредгольма	207
	5. Проектирующие операторы	212
08	6. Спектр оператора	215
28	7. Симметрические операторы. Свойства квадратичной	
88	формы оператора	218
	8. Квадратный корень из симметрического оператора	221
88	9. Спектральная теорема для симметрического оператора	
	в $n$ -мерном пространстве	222
98	10. Вполне непрерывные операторы. Спектральная теорема	225
88	11. Спектральная теорема для симметрического ограниченного	
	оператора	228
98	12. Спектральная теорема для унитарного оператора	233
	13. Неограниченные операторы	240
801	14. Спектр симметрического ограниченного оператора	253
	15. Спектр и резольвента неограниченных операторов	257
101	<i>Задачи</i>	262
120	§ 3. Операторные уравнения. Аналитические функции и операторы	263
121	1. Аналитические свойства резольвенты	263
	2. Теорема Келдыша	272
	3. Корневые векторы и корневые подпространства	
121	несамосопряженных операторов	275
141	4. Дифференциальные операторы	283
	<b>Глава V. СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ</b>	
141	§ 1. Теорема о следе для оператора в $n$ -мерном пространстве	289
141	§ 2. Ядерные операторы. Теорема о следе	290
153	1. Теорема о следе для положительного ядерного оператора	290
156	2. Свойства $s$ -чисел вполне непрерывных операторов	294
156	3. Оценки собственных значений вполне непрерывного оператора	302
161	4. Оценки $s$ -чисел произведений и сумм линейных вполне	
161	непрерывных операторов	308
161	5. Теорема о следе для ядерного оператора	310
161	§ 3. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций.	
161	Следы дифференциальных операторов	317
161	1. Функции класса $K$	317
170	2. Дзета-функция	319
171	3. Регуляризованные суммы корней функции класса $K$	322
	<i>Задачи</i>	322
	§ 4. Следы дискретных операторов	327
	<b>Глава VI. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ</b>	
171	§ 1. Обобщенные функции	354
171	1. Понятие обобщенной функции	354
181	2. Основные свойства обобщенных функций	359
181	3. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями	364
181	4. Прямое произведение и свертка обобщенных функций	366
181	§ 2. Преобразование Фурье	369
181	1. Преобразование Фурье функций из пространства $L^1$	369
181	2. Преобразование Фурье функций из пространства $L^2$	372
181	3. Преобразование Фурье обобщенных функций	373
	Литература	376
	Предметный указатель	377